Problemes de geometria del triangle

7. (OI 1959) Construïu un triangle rectangle amb hipotenusa donada c de manera que la mediana corresponent a la hipotenusa sigui la mitja geomètrica dels dos catets del triangle.

Primera solució

Fem un cercle de diàmetre c. Hem de buscar un triangle rectangle amb el vèrtex damunt de la semicircumferència. Tot rau a trobar-li l'alçada h. Sabem que la seva àrea és $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{ch}{2}$. D'on $ab = ch$. D'altra banda $ab = \dfrac{c^2}{4}$. Per tant $h = \dfrac{c}{4}$.

Segona solució

D'una banda sabem que la mediana $m = \dfrac{c}{2}$, ja que són radis d'una mateixa circumferència. Volem que $m^2 = a \cdot b = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$. Aleshores, com que

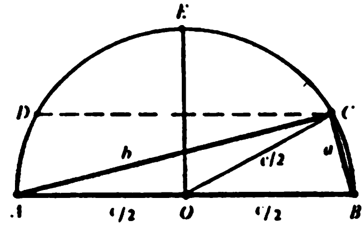
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2a \cdot b &= (a+b)^2, \\ a^2 + b^2 - 2a \cdot b &= (a-b)^2, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} a+b &= \sqrt{c^2 + \frac{c^2}{2}} = c\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ a-b &= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{2}} = c\sqrt{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

i hem acabat.

Nota. Observem que, d'entrada, el problema rau a tallar una hipèrbola equilàtera $a \cdot b = \dfrac{c^2}{2}$ i una circumferència $a^2 + b^2 = c^2$, on c és conegut, però una anàlisi més detallada ens mostra que és un problema resoluble amb regle i compàs.



8. (OI 1961) Siguin a, b, c els costats d'un triangle i T la seva àrea. Demostreu que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4T\sqrt{3}$. En quin cas val la igualtat?

Primera solució

Si designem per p el perímetre del triangle, tindrem que $p = a + b + c$.

És conegut que, d'entre tots els triangles de perímetre donat, el triangle equilàter és el que té la màxima àrea. I aquesta àrea val

$$\left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Per tant, $T \leq \left(\frac{p}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ara, com que

$$\begin{aligned} p^2 &= (a+b+c)^2 &&= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 && &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac, \end{aligned}$$

resulta que $p^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$. D'on: $p^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, amb igualtat si, i només si, $a = b = c$.

De tot això se'n segueix que

$$T \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

i hem acabat.

Segona solució

Sigui h una de les alçades que cauen dins del triangle i suposem que és l'alçada que correspon al costat a. Designem per m, n les dues parts en que h divideix a. Tenim que $b^2 = h^2 + m^2, c^2 = h^2 + n^2$ i

$$T = \frac{1}{2}(m+n)h.$$

Amb aquesta nomenclatura la desigualtat que volem provar és

$$2h^2 + m^2 + n^2 + (m+n)^2 \geq 2\sqrt{3}(m+n)h$$

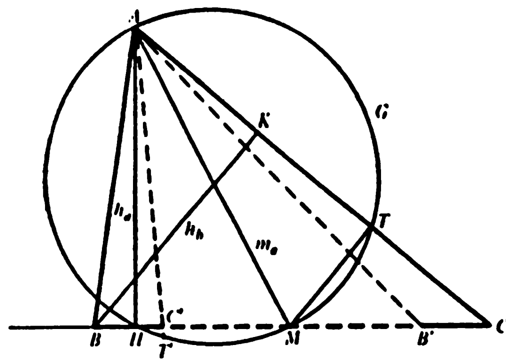
que és equivalent la l'expressió quadràtica en h:

$$Q(h) = h^2 - \sqrt{3}(m+n)h + n^2 + m^2 + mn \geq 0. \tag{1}$$

Si completem quadrats resulta que $Q(h) = \left[h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(m-n)\right]^2$. Aleshores $Q(h) \geq 0$, per a tot h, per tant la desigualtat (1) val per a tot h. $Q(h) = 0$ si, i només si, $m = n$ i $h = \sqrt{3}m$. En aquest cas el triangle és equilàter i, per tant, $a^2 + b^2 + c^2 = 4T\sqrt{3}$.

9. (OI 1960) Construïu un triangle ABC donades h_a, h_b (les alçades d'A i de B) i m_a, la mediana del vèrtex A.

Solució



Considerem la figura adjunta, en la qual hem dibuixat el cercle G de diàmetre $AM = m_a$. Resulta que AHM, amb $AH = h_a$, és un triangle rectangle i M és el punt mig de BC. A més MT és perpendicular a AC i, per tant a $BK = h_b$ i val exactament la meitat; és a dir, $MT = \dfrac{h_b}{2}$. Com podem determinar el punt T?

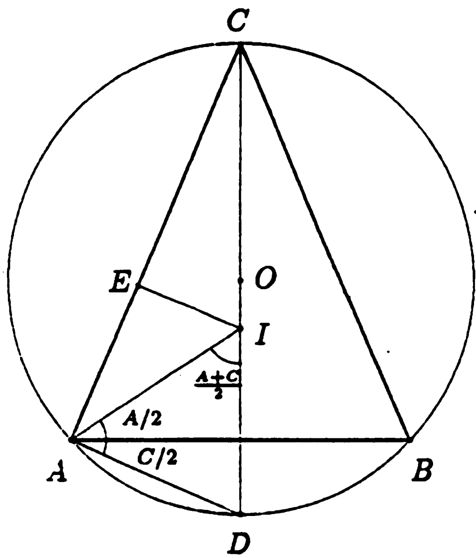
Fem el cercle de diàmetre $AM = m_a$. Dibuixem el triangle rectangle AHM, amb $AM = m_a$ i $AH = h_a$.
Ara, amb centre en M i radi $MT = \dfrac{h_b}{2}$ fem un arc de circumferència fins que tallem la circumferència G en el punt T. Unint A amb T i perllongant convenientment AT i HM determinarem el punt C i el problema estarà resolt.

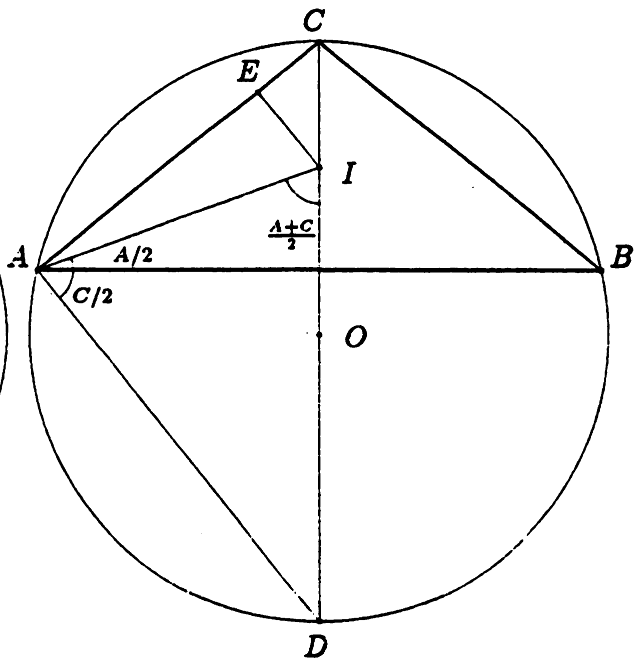
Nota. El mètode que consisteix a suposar el problema resolt, i de la situació que ens proporciona el problema resolt, deduir-ne algunes característiques del probelma que ens permetin de resoldre'l efectivament, fou usat a bastament pels matemàtics grecs i va rebre, en l'obra de PAPPOS, el nom d'*anàlisi*. La *síntesi* era la resolució del problema, a partir de les dades donades; és a dir, el problema oposat a l'anàlisi. A aquest problema hem procedit primer per anàlisi i després hem realitzat la síntesi.

10. (OI 1962) Considereu un triangle isòscels. Sigui r el radi de la circumferència circumscrita i ρ el radi de la circumferència inscrita. Demostreu que la distància d entre els centres d'aquestes dues circumferències és

$$\sqrt{r(r-2\rho)}.$$

Primera solució





Els triangles CAD i CEI són rectangles i semblants, i es compleix

$$\frac{AD}{EI}=\frac{CD}{CI}.$$

El triangle ADI és isòscels i en resulta $AD=DI=r-d$ i $CI=r+d$. La proporció anterior queda aleshores en la forma

$$\frac{r-d}{\rho}=\frac{2r}{r+d}.$$

I fent operacions tenim que $r^2-d^2=2r\rho$ i $d^2=r^2-2r\rho=r(r-2\rho)$.

En cas que el triangle sigui obtusangle, surt tot igual llevat que $AD=DI=r+d$ i $CI=r-d$.

Segona solució

D'una banda

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{C}{2} &= \frac{IE}{IC} &= \frac{\rho}{IC},\\
\sin\frac{C}{2} &= \frac{AD}{2r} &= \frac{ID}{2r},
\end{aligned}
$$

ja que el triangle DBM és isòscels i de l'altra, $IC \cdot ID = r^2 - d^2 = (r+d)(r-d)$..

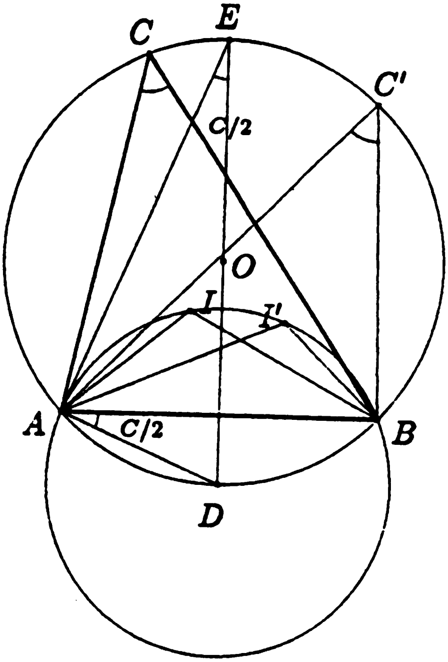
* * *

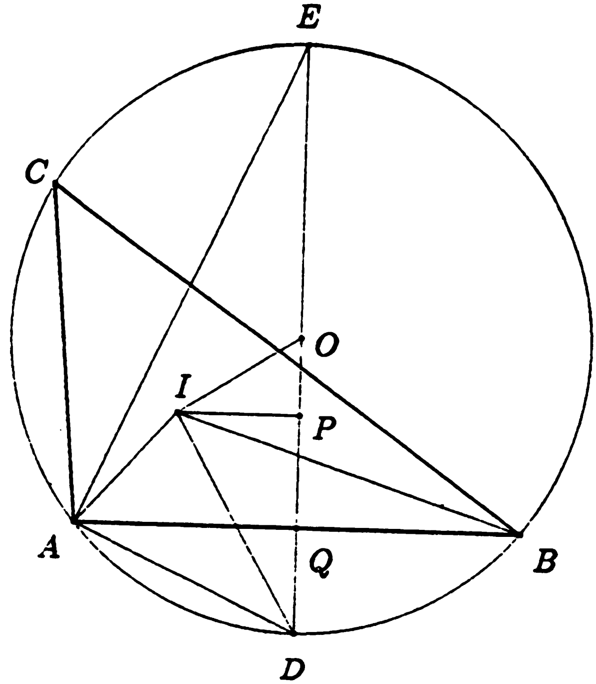
Tot seguit ens vam plantejar si aquesta relació era vàlida en general —de fet és un teorema que fou establert per EULER— i com podíem fer-ho per tal de demostrar-lo.

En primer lloc podem observar que a la segona resolució el fet que el triangle sigui isòscels, malgrat el que pugui semblar, no juga cap paper. Els únics fets que juguen un paper són la *invariància* de la potència d'un punt a una circunferència i el fet que l'incentre —el centre de la circumferència inscrita— sigui el punt on es tallen les bisectrius. Considerem la potència del punt I respcete de la circumferència circumscrita usant dues rectes: la recta CID que passa pels punts —*alineats*— C, I i D, on D és el punt mig de l'arc que correspon a la corda AB en la circumferència crcumscrita i IO la recta que uneix els dos centres, el circumcentre i l'incentre. Considerem d'altra banda el triangle AOD de la figura següent. És *isòscels* —aquest fet és clau— i, per tant, com que $AD = ID$, podem refer la segona demostració.

Una altra manera de veure-ho és la següent:

Observem en primer lloc que si fixem els dos vèrtexs A i B d'un triangle i fem moure el vèrtex C, mantenint fixa la circumferència circumscrita, l'incentre descriu l'arc capaç del segment AB vist sota l'angle $\pi/2 + C/2$. Aquest arc té centre al punt D intersecció de la mediatriu d'AB amb la circumferència circumscrita. (*Fgura de l'esquerra.*)





Sigui $s = AD$ ($= DI$ per la consideració anterior, *figura de la dreta*), $m = DQ$ i $n = IP$. El triangle EAD és rectangle i pel teorema del catet $s^2 = 2rm$. El triangle OPI també és rectangle i pel teorema de Pitàgoras $d^2 = (r - \rho - m)^2 + n^2$. Aplicant novament el teorema de Pitàgoras al triangle IPD surt $n^2 = s^2 - (\rho + m)^2$, i substituint a la igualtat anterior, tenint present la igualtat $s^2 = 2rm$, dóna $d^2 = (r - \rho - m)^2 + s^2 - (\rho + m)^2 = r^2 - 2r\rho = r(r - 2\rho)$.